



НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ УПРАВЛЕНИЯ

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 1

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ И КОНТРОЛЬНАЯ
РАБОТА**

КИЕВ-2010

Укладачі:
Лопатін Олексій Костянтинович
професор, доктор фізико-математичних наук,
Черненко Ольга Борисівна,
старший викладач

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА-1

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ

Содержание

Тема 1. Простые проценты	3
Тема 2. Сложные проценты	10
Тема 3. Современная стоимость денег (NPV)	16
Тема 4. Финансовые ренты. Функция $s_{n,i}$	22
Тема 5. Современная стоимость ренты	27
Контрольная работа	28

Список рекомендованой литературы

1. Н.В. Радионов, С.П. Радионов, Основы финансового анализа, Альфа, Санкт-Петербург, 1999.
2. Я.С. Мелкумов, Теоретическое и практическое пособие по финансовым вычислениям, Инфра-М, Москва, 1996.
3. Е.М. Четыркин, Финансовый анализ производственных инвестиций, Дело, Москва, 1998.
4. В.В. Ковалев, В.А. Уланов, Курс финансовых вычислений, Финансы и статистика, Москва, 1999.
5. Л.Г. Батракова, Финансовые расчеты в коммерческих сделках, Логос, Москва, 1998.
6. И.Я. Лукасевич, Анализ финансовых операций, Финансы, Москва, 1998.
7. В.И. Малыхин, Финансовая математика, ЮНИТИ, Москва, 1999.
8. О.С. Стрельченко, .Г. Стрельченко, Фінансова математика, Педагогчна преса, Київ, 1999.

Тема 1. Простые проценты

1.1 Основные формулы и образцы решения задач

Формула, выражающая наращенную сумму при начислении простых процентов, имеет вид

$$S = P(1 + rt), \quad (1)$$

где r -процентная ставка, t - время (целое или дробное).

Банковский депозит под простые проценты

Пример 1.1. Сбербанк выплачивает по пенсионным вкладам 17% годовых (простых). Пенсионер положил на сберкнижку 1200 грн, Какая сумма будет на счете вкладчика через полгода, через три года, через пять лет и три месяца, если период начисления процентов (простых) равен году?

Решение. По формуле (1) имеем:

$$S_1 = 1200 \times (1 + 0.50 \times 0.17) = 1302 \text{ грн.},$$

$$S_2 = 1200 \times (1 + 3.00 \times 0.17) = 1812 \text{ грн.},$$

$$S_3 = 1200 \times (1 + 5.25 \times 0.17) = 2271 \text{ грн.}$$

Простой дисконт

Простым дисконтом называется процентный доход, вычитаемый из ссуды в момент ее выдачи. Если процентная ставка простого дисконта — $r\%$, величина ссуды — S (эта сумма должна быть возвращена), P — величина ссуды, полученная в момент ее выдачи, t лет — срок, на который выдается ссуда, то простой дисконт равен J

$$P = S(1 - rt). \quad (2)$$

Пример 1.2. Финансовая компания дает ссуду 5000 грн. на 3 года под простой дисконт, равный 5% в год. Какую сумму получит клиент в момент получения ссуды?

Решение. Находим P по формуле (2) при $S = 5000$, $r = 5\%$, $t = 3$:

$$P = 5000 \times (1 - 0.05 \times 3) = 5000 \times 0.85 = 4250 \text{ грн.}$$

Английская, немецкая и французская практики вычисления сроков вкладов

В формуле

$$S = P(1 + r \cdot n)$$

период начисления n измеряется в годах. Это не всегда удобно, так как период начисления может быть меньше года (например, с 18 марта 2004 года по 20 октября 2004 года). В этом случае полагают $n = t/K$, где t — период начисления (в днях), K — продолжительность года (в днях). Тогда

$$S = P(1 + i \cdot t/K)$$

Дата выдачи и дата погашения ссуды **всегда считаются за один день**.

В *немецкой практике* начисления процентов один полный месяц равен 30 дням, продолжительность года K — 360 дней. Во *французской практике* период начисления процентов равен фактическому сроку, продолжительность года K — 360 дней. В *английской практике* период начисления процентов равен фактическому сроку, продолжительность года $K = 365$ дней (невисокосный год) или 366 дней (високосный год).

Пример 1.3. Первоначальная сумма $P = 3000$ грн помещена в банк под $i = 12\%$ годовых (проценты простые) на срок с 18 марта 2003 года по 20 октября 2003 года. Найдём наращенную сумму в каждой из практик начисления процентов.

В *немецкой практике* начисления процентов продолжительность года $K = 360$ дней, $t = 14$ (март) + 6х30 (апрель, май, июнь, июль, август, сентябрь) - 20 (октябрь) - 1 (день открытия и день закрытия счета) всегда считаются за один день = 213 дней. Тогда $S = P(1 + i \cdot t/K) = 3000 \cdot (1 + 0,12 \cdot 213/360) = 3213$ грн.

Во *французской практике* продолжительность года $K = 360$ дней, $t = 14$ (март) + 30 (апрель) + 31 (май) + 30 (июнь) + 31 (июль) + 31 (август) + 30 (сентябрь) + 20 (октябрь) - 1 (день открытия и день закрытия счета) всегда считаются за один день = 216 дней. Тогда $S = P(1 + i \cdot t/K) = 3000 \cdot (1 + 0,12 \cdot 216/360) = 3216$ грн.

В *английской практике* продолжительность года $K = 365$ дней, $t = 216$ дней. Тогда $S = P(1 + i \cdot t/K) = 3000 \cdot (1 + 0,12 \cdot 216/365) = 3213,04$ грн.

Учет векселей

Простые проценты применяются иногда в финансовой операции, которая называется *банковским учетом* и заключается в следующем: банк покупает вексель на сумму S у его владельца до истечения срока оплаты векселя по цене P , меньшей, чем S . Эта операция называется *учетом векселя*. Цена P рассчитывается по формуле:

$$P = S(1 - td), \quad (3)$$

где t — число лет, остающееся с момента учета векселя до срока его оплаты, $d\%$ — учетная ставка, установленная банком.

Пример 1.3. Тратта (переводной вексель) выдана на 10000 грн. с уплатой 15 октября того же года. Владелец векселя учел его в банке 15 августа по учетной ставке 10%. Какую сумму он получил? Какую сумму он получит, если срок уплаты по векселю 15 октября следующего года?

Решение. Число дней между 15 августа и 15 октября равно 60. Считая, что в году 360 дней (так принято при банковском учете), имеем $t = 60/360 = 1/6$. По формуле (3) при $S = 10000$, $d = 0.1$, $t = 1/6$ получаем ответ на первый вопрос:

$$P = 10000 \cdot (1 - \frac{1}{6} \cdot 0,1) = 10000 \cdot \frac{59}{60} = 9833.33 \text{ грн.}$$

Число дней между 15 августа и 15 октября следующего года равно $360 + 60 = 420$ дней, т.е., $t = 420/360 = 7/6$.

По формуле (3) при $S = 10000$, $d = 0.1$, $t = 7/6$ получаем ответ на второй вопрос

$$P = 10000 \cdot (1 - \frac{7}{6} \cdot 0,1) = 10000 \cdot \frac{53}{60} = 8833.33 \text{ грн.}$$

Приведение ценности денег к одному моменту времени

В теории и на практике нам постоянно приходится решать вопрос о том, как соотносятся между собой суммы денег, полученные в различные моменты времени. Финансовая теория отвлекается от субъективной оценки экономического агента.. Она исходит из *принципа невозможности межвременного арбитража*: ценность некоторой суммы денег S в будущем эквивалентна такой сумме денег P в текущий момент времени, которая будучи подходящим образом использованной на финансовом рынке, принесет нам ровно сумму S на рассматриваемый будущий момент времени.

Современная (или приведенная) ценность P суммы S , которая будет получена через t лет, вычисляется (определяется) по формуле (1):

$$P = \frac{S}{1 + rt}. \quad (4)$$

Вычисление современной ценности суммы денег называется *дисконтированием* этой суммы.

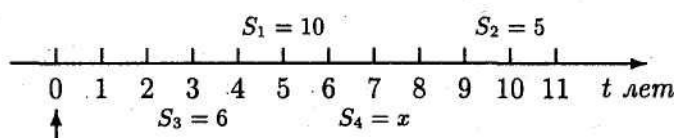
Термин „современная“ ценность не носит абсолютного характера — современным в расчетах может быть взят любой момент времени.

Эквивалентность контрактов

Два контракта называют *эквивалентными*, если современные ценности потоков платежей по этим контрактам одинаковы. Это понятие используется при изменении контракта и для сравнения контрактов.

Пример 1.4. Фирма обязалась заплатить за полученное от города производственное помещение 10 000 грн. через 5 лет и еще 5 000 грн. через 10 лет от настоящего момента. Фирма желает рассчитаться быстрее: уплатить 6 000 грн. через 3 года, а остальной долг выплатить через 7 лет (от настоящего момента). Какая сумма должна быть выплачена через 7 лет, если на деньги начисляются 8% простых в год?

Решение. Изобразим суммы (в тыс. грн.) первого контракта над осью времени, а второго — под осью. Стрелкой внизу указан современный момент времени.



Дисконтируя все суммы на момент 0, находим приведенные к моменту 0 ценности этих сумм:

$$P_1 = \frac{S_1}{1 + 5r} = \frac{10}{1 + 5 \cdot 0.8} = 7.43,$$

$$P_2 = \frac{S_2}{1 + 10r} = \frac{5}{1 + 10 \cdot 0.8} = 2.78,$$

$$P_3 = \frac{S_3}{1 + 3r} = \frac{6}{1 + 3 \cdot 0.8} = 4.839,$$

$$P_4 = \frac{S_4}{1 + 7r} = \frac{x}{1 + 7 \cdot 0.8} = \frac{x}{1.56}.$$

Контракты будут эквивалентны, если выполнено равенство:

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4$$

Из последнего равенства получаем уравнение для x , которое легко решить:

$$x = 7.928 \text{ грн.}$$

1.2. Работа в аудитории

1. Вкладчик положил в банк, выплачивающий 7% простых в год, вклад 3000 грн. Какая сумма будет на счету вкладчика а) через 3 месяца, б) через 1 год, в) через 3 года 5 месяцев?
2. Вкладчик положил в банк, выплачивающий 20% простых в год, вклад 3000 грн. Какая сумма будет на счету вкладчика, если деньги внесены 15 октября 2007 года, а изъяты 22 февраля 2009 года. Провести расчеты для немецкой, английской и французской практик.
3. Покупатель приобретает дом, который стоит 50000 грн. Он уплатил сразу 20000 грн., а на остальную сумму получил кредит на 1 год 6 месяцев под 4% годовых (простых), который должен погасить ежемесячными равными платежами. Чему равна каждая уплата?
4. Фермер приобрел трактор, цена которого 15000 грн., уплатив сразу 6000 грн. и получив на остальную сумму кредит на 2 года 6 месяцев, который он должен погасить равными платежами по полугодиям. Чему равна каждая уплата, если кредит выдан под 8% годовых (простых)?
5. В банк, выплачивающий 6% простых годовых, положили 6000 грн. Через сколько лет на счету будет 6540 грн.?
6. Компания по производству радиоаппаратуры получила в коммерческом банке ссуду в 90000 грн. на два года под простой дисконт, равный 12% в год. Какую сумму получила компания на руки?
7. Компания по производству радиоаппаратуры получила в коммерческом банке ссуду на два года под простой дисконт, равный 12% в год. Компания желает получить на руки 90000 грн. Какую сумму она будет должна банку?
8. Компания по производству радиоаппаратуры получила в коммерческом банке ссуду на два года под 12% годовых (простых). Компания желает получить на руки 90000 грн. Какую сумму она будет должна банку?
9. Г-н Петров имеет вексель на 15000 грн., срок которого 1 июля. Он хочет учесть его 1 марта того же года в банке, простая учетная ставка которого 7%. Какую сумму получит г-н Петров за этот вексель?
10. Г-н Гаврилов должен выплатить господину Серову 20000 грн. в следующие сроки: 5000 грн. через 2 года, 5000 грн. через 3 года и еще 10000 грн. через 5 лет, считая от настоящего момента. Г-н Гаврилов предложил изменить контракт, обязавшись уплатить 10000 грн. через 3 года и еще 10000 грн. через 4 года от настоящего момента. Эквивалентны ли эти контракты, если на деньги начисляются 5% годовых (простых)? Если контракты не эквивалентны, то какой из них выгоднее для г-на Серова?
11. В рассматриваемый год ожидаемая инфляция составляет 20%. Какую номинальную годовую процентную ставку следует установить по вкладам в банке, чтобы реальная годовая ставка равнялась 3%?

1.3. Домашнее задание

1. Какую сумму надо положить в банк, выплачивающий 4% простых в год, чтобы получить 5000 грн. а) через 4 месяца, б) через 1 год, в) через 2 года 9 месяцев?
2. Вкладчик положил в банк, выплачивающий 18% простых в год, вклад 6000 грн. Какая сумма будет на счету вкладчика, если деньги внесены 15 октября 2007 года, 22 декабря 2008 года внесена сумма 2000 грн., а счет закрыт 1 мая 2009 года. Провести расчеты для немецкой, английской и французской практик.
3. Фермер собирает деньги на постройку нового коровника и положил в банк 100000 грн. Через 2 года 6 месяцев на счету было 120000 грн. Сколько процентов (простых) выплачивает банк в год?
4. Г-н Иванов покупает в магазине телевизор, цена которого 450 грн. На всю эту сумму он получает кредит, который должен погасить за два года равными ежеквартальными платежами. Чему равна каждая уплата, если магазин предоставляет кредит под 6% годовых (простых)?
5. Какую прибыль получит банк в результате учета 20 мая трех векселей по 20000 грн. каждый, если срок оплаты первого векселя 10 сентября, а двух других - 1 октября того же года и учетная ставка этого банка равна 10%?
6. Клиент учел 1 февраля 1992 года вексель на сумму 40000 грн., срок которого 1 июня того же года, и получил за него 38790 грн. Какова учетная ставка банка?
7. Г-н Гаврилов должен выплатить господину Серову 20000 грн. в следующие сроки: 5000 грн. через 2 года, 5000 грн. через 3 года и еще 10000 грн. через 5 лет, считая от настоящего момента. Г-н Гаврилов предложил изменить контракт, обязавшись уплатить 10000 грн. через 3 года. Какую сумму должен выплатить г-н Гаврилов по новому контракту через 4 года, чтобы новый контракт был эквивалентен первоначальному?
8. Г-н Иванов приобрел в кредит набор мебели, обязавшись выплачивать за него по 200 грн. каждый квартал в течение трех лет. Через год, сделав четыре платежа, г-н Иванов пожелал сразу погасить оставшийся долг. Какую сумму он должен заплатить, если на деньги начисляются 8% годовых (простых)?
9. Г-н Иванов приобрел в кредит набор мебели, обязавшись выплачивать за него по 200 грн. каждый квартал в течение трех лет. Г-н Иванов пожелал сразу изменить первоначальный контракт и выплачивать свой долг равными ежегодными платежами. Какова должна быть каждая из этих уплат, чтобы новый контракт был эквивалентен первоначальному?
10. Торговая фирма планирует приобрести новые помещения, за которые она должна заплатить 120000 грн. Фирма имеет два предложения. По первому предложению фирма должна выплатить эту сумму за 3 года, выплачивая в конце каждого года по 40000 грн. По второму предложению фирма должна заплатить сразу 30000 грн., а остальные 90000 грн. погашать равными суммами каждые полгода, выплатив весь долг к концу третьего года. Какое предложение выгоднее для фирмы? На деньги начисляются 8% годовых (простых)
11. В рассматриваемый год ожидаемая инфляция составляет 20%. Какова реальная доходность по вкладу в банк, если годовой процент по нему равен 25%?
12. Господин Иванов занял у господина Петрова 9200 грн и выдал ему вексель, по которому обязался выплатить через три месяца 10 тыс. грн. Найти годовой процент r и соответственно годовую учетную ставку d оказанной Петровым «финансовой» любезности. Задачу решите если r и d — ставки простых процентов.

Тема 2. Сложные проценты

2.1 Основные формулы и образцы решения задач

Говорят, что на сумму P начисляется i *сложных процентов* в течение n процентных периодов, если в конце каждого периода к сумме, имевшейся на начало этого периода, прибавляется $i\%$ от этой суммы. К концу n -го периода наращенная сумма S_n будет равна:

$$S_n = P(1+i)^n. \quad (1)$$

Формула (1) может быть записана не только для целых, но и дробных периодов

$$S_n = P(1+i)^t, \quad (2)$$

где t может принимать дробные значения.

Пример 2.1. *Сберегательный банк начисляет ежегодно 8% сложных. Клиент положил в этот банк 20 000 руб. Какая сумма будет на его счете: а) через 5 лет, б) через 6 лет и три месяца?*

Решение. , а) Применяя формулу (1), находим наращенную сумму S при $P = 20000$, $i = 0.08$,

$$t = 5:$$

$$S = 20\,000(1 + 0.08)^5 = 20\,000 \times 1.469328 = 29\,386.56 \text{ руб.}$$

б) По формуле (2) находим наращенную сумму S при $P = 20000$, $i = 0.08$, $t = 6.25$:

$$S = 20000(1 + 0.08)^{6.25} = 20000 \times 1.617702 = 32354.04 \text{ руб.}$$

В практике финансовых расчетов ставку сложных процентов, как правило, указывают на период, равный году, но начисление сложных процентов может производиться каждое полугодие, квартал, месяц или даже день. При этом за каждый такой период, равный $1/m$ части года, начисляются сложные проценты по ставке i/m сложных процентов. В этом случае формула (2) примет вид:

$$S = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{tm}, \quad (3)$$

где t — длительность промежутка времени, в течение которого начисляются сложные проценты

(t измеряется в годах). Например, в случае одного квартала $t = 0.25$.

Чтобы показать, что при годовой ставке сложных процентов i вычисление сложных процентов производится m раз в году по ставке i/m эту ставку обозначают j_m . Тогда последняя формула принимает вид:

$$S = P(1 + j/m)^{tm} \quad (4)$$

Пример 2.2. Банк начисляет проценты $j_4 = 8\%$. Клиент положил в этот банк 20 000 руб. Какая сумма будет на его счете через 5 лет?

Решение. Применяя формулу (4) при $j_4 = 8\%$ находим:

$$S = 20000(1 + \frac{0,08}{4})^{20} = 20000 * 1.4859474 = 29718.95 \text{ грн.}$$

Применяя формулу (4) при $j_{12} = 8\%$ находим:

$$S = 20000(1 + \frac{0,08}{12})^{60} = 20000 * 1.4898457 = 29796.91 \text{ грн.}$$

Непрерывное начисление процентов по годовой ставке δ за время t сумма определяется формулой:

$$S = Pe^{\delta t}. \quad (5)$$

Процентная ставка δ в этом случае называется *силой роста*

Учет векселей по сложной учетной ставке

Операция *банковского учета*, иногда производится по сложной учетной ставке d_c , начисляемой один раз в год, или по сложной учетной ставке f_m , которая начисляется m раз в год в размере $f_m/m\%$. В этих случаях сумма денег P , выплачиваемая банком за вексель на сумму S , вычисляется по формулам:

$$P = S(1 - d_c)^t, \quad (6)$$

$$P = S(1 - \frac{f_m}{m})^{tm}. \quad (7)$$

где t — величина промежутка времени от момента учета векселя до срока его выкупа (в годах).

Пример 2.3. Вексель выдан на 10000 руб. с уплатой 15 октября. Владелец документа погасил его в банке 15 августа того же года по сложной учетной ставке 10%. Сколько он получил? Сколько получит владелец документа, если срок уплаты по нему 15 октября следующего года?

Решение. Число дней между 15 августа и 16 октября равно

61-1-60. Применяем формулу (6) при $S = 10000$, $d_c = 0.1$, $t = 60/360 = 1/6 = 0.1(6)$:

$$P = 10000(1 - 0,1)^{0.1(6)} = 0,982593 * 10000 = 9825.93 \text{ грн.}$$

Число дней между 15 августа и 16 октября следующего года равно $360 + 60 = 420$ дней, то есть $t = 420/360 = 7/6 = 1.1(6)$:

$$P = 10000(1 - 0,1)^{1 \cdot 1(6)} = 0,8843338 \cdot 10000 = 8843.34 \text{ грн.}$$

Эквивалентность процентных ставок

При заключении финансовых контрактов каждый участник сделки стремится заключить контракт на наиболее выгодных для себя условиях. Условия контракта могут быть различными, и надо иметь возможность сравнивать контракты. При этом различные контракты могут предусматривать различные виды начисления процентов, и для сравнения таких контрактов надо разработать способы приведения различных процентных ставок к одному виду. Для этой цели вводятся понятия: *эквивалентность процентных ставок* и *эффективная процентная ставка*.

Мы познакомились с семью видами процентных ставок, применяемых в финансовых расчетах: простые и сложные проценты, начисляемые один раз в год (обозначим их i_s и i_c); годовая ставка f_m , по которой m раз в год начисляется j_m/m сложных процентов; ставка непрерывных процентов (сила роста δ); простая и сложная учетные ставки d_s и d_c и учетная ставка f_m , начисляемая m раз в году. Напомним формулы для вычисления наращенной суммы S для всех семи видов процентных ставок:

- (1) $S = P(1 + ti_s),$
- (2) $S = P(1 + i_c)^t,$
- (3) $S = P\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{tm},$
- (4) $S = Pe^{\delta t},$
- (5) $S = \frac{P}{1 - td_s},$
- (6) $S = \frac{P}{(1 - d_c)^t},$
- (7) $S = \frac{P}{\left(1 - \frac{f_m}{m}\right)^{tm}}.$

В этих формулах t есть число лет (оно может быть дробным).

Две процентные ставки называют *эквивалентными*, если применение их к одинаковым суммам в течение одинаковых промежутков времени дает одинаковые наращенные суммы.

Приравняв правые части каких-либо двух из приведенных выше семи формул и выражая из этого равенства одну процентную ставку через другую, мы получаем условие эквивалентности соответствующих процентных ставок за t лет.

Эффективная процентная ставка

Эффективной процентной ставкой, соответствующей данной процентной ставке, называется ставка сложных процентов i_c , эквивалентная данной процентной ставке и не зависящая от срока применения этой ставки.

Эффективные процентные ставки существуют только для ставок j_m, δ, d_c, f_m . Вычисление эффективной процентной ставки применяется для определения реальной

доходности финансовой операции. Эта доходность определяется соответствующей эффективной процентной ставкой.

Пример 2.4. Банк выплачивает по вкладам 10% годовых (сложных). Какова реальная доходность вкладов в этом банке при следующих видах начисления процентов: а) ежемесячно, б) ежеквартально, в) по полугодиям, г) непрерывно?

Решение. Для того чтобы определить реальную доходность вкладов в банк, надо найти эффективную процентную ставку i_c при: а) $j_{12} = 0.1/12$, б) $j_4 = 0.1/4$, в) $j_2 = 0.1/2$, г) $\delta = 0.1$.

По формулам (2), (3) получаем:

а)

$$i_c = (1 + 0.1/12)^{12} - 1 = 0.1047 = 10.47\%;$$

б)

$$i_c = (1 + 0.1/4)^4 - 1 = 0.1038 = 10.38\%;$$

в)

$$i_c = (1 + 0.1/2)^2 - 1 = 0.1025 = 10.25\%;$$

г)

$$i_c = e^{0.1} - 1 = 0.1052 = 10.52\%.$$

2.2. Работа в аудитории

1. Предприниматель положил в банк, начисляющий 6% годовых (сложных), 8000 грн. Какая сумма будет на счету этого клиента а) через 1 год, б) через 8 месяцев, в) через 4 года, г) через 6 лет 6 месяцев?
2. Владелец мастерской может вложить деньги в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_6=10\%$. Какую сумму он должен вложить, чтобы получить 20000 грн. через 3 года 3 месяца?
3. Через сколько лет 1 грн., вложенный в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_3=10\%$, превратится в 1000000 грн.?
4. Клиент вложил в банк 1000 грн. Какая сумма будет на счету этого клиента через 8 лет, если банк непрерывно начисляет проценты по годовой ставке, равной 5%?
5. Банк начислял на вложенные в него деньги проценты непрерывно по ставке в 1990 г. - 12%, в 1991 г. - 18%, в 1992 и 1993 гг. - 24%. Какая сумма будет на счету 31 декабря 1993 года, если 1 января 1990 года на этот счет было положено 3000 грн.?
6. Банк выдает ссуду на 10 лет или под 7% годовых (сложных), или под простые проценты. Какую ставку простых процентов должен установить банк, чтобы полученный им доход не изменился?
7. Определить ставку сложных процентов i_c , эквивалентную ставке а) $j_2=10\%$, б) $j_6=10\%$, в) $j_{12}=10\%$.
8. Банк начисляет на вложенные в него деньги проценты по ставке $j_4=6\%$ и собирается перейти к непрерывному начислению процентов. Какую силу роста должен установить банк, чтобы доходы клиентов не изменились?

9. Банк учитывает вексель по учетной ставке $f_3=8\%$ и желает перейти к сложной учетной ставке d_c . Какой величины должна быть ставка d_c , чтобы доход банка не изменился?
10. Банк выплачивает по вкладам 6% годовых (сложных). Какова реальная доходность вкладов в этот банк, если начисление процентов делается а) по полугодиям, б) поквартально, в) ежемесячно?
11. Банк учитывает векселя по сложной учетной ставке $f_4=8\%$. Какова реальная доходность этой операции?

2.3. Домашнее задание

1. Предприниматель положил в банк, начисляющий проценты по ставке $j_3=6\%$, 8000 грн. Какая сумма будет на счету этого клиента а) через 1 год, б) через 8 месяцев, в) через 4 года, г) через 6 лет 6 месяцев?
2. Фермер хочет вложить 30000 грн., чтобы через 5 лет получить 40000 грн. Под какую процентную ставку j_{12} он должен вложить свои деньги?
3. Клиент вложил в банк 1000 грн. Какая сумма будет на счету этого клиента через 1 год, если банк начисляет проценты по ставке а) $j_1=5\%$, б) $j_6=5\%$, в) $j_{12}=5\%$, г) $j_{360}=5\%$?
4. Какую сумму надо положить в банк, выплачивающий непрерывные проценты по ставке 7%, чтобы через 10 лет на счету было 5000 грн.?
5. Г-н Петров имеет вексель на 15000 грн., который он хочет учесть 1 марта текущего года в банке по сложной учетной ставке, равной 7%. Какую сумму он получит, если срок векселя а) 1 июля того же года, б) 1 июля следующего года?
6. Банк выплачивает на вложенные в него деньги 8% годовых (сложных). Какую ставку j_m должен установить банк, чтобы доходы клиентов не изменились, если а) $m=2$, б) $m=6$, в) $m=12$?
7. Банк учитывает вексель за 60 дней до срока его оплаты по простой учетной ставке $d_n=6\%$. Какую сложную учетную ставку должен установить банк, чтобы доход банка не изменился?
8. Банк учитывает векселя по сложной учетной ставке $d_c=6\%$. По какой учетной ставке f_m этот банк должен учитывать векселя, чтобы доход банка не изменился, если а) $m=2$, б) $m=4$, в) $m=12$?
9. Банк учитывает векселя по сложной учетной ставке 8%. Какова реальная доходность этой операции?
10. Банк начисляет на вложенные в него деньги проценты по ставке $j_4=18\%$ и собирается перейти к непрерывному начислению процентов. Какую силу роста должен установить банк, чтобы доходы клиентов не изменились?

Замечание. Запись $f_{12}=5\%$ означает годовую процентную ставку в 5% начисляемую 12 раз в году, т.е. ежемесячно.

Тема 3. Современная стоимость денег (NPV)

5.1 Основные формулы и образцы решения задач

Определение современной ценности денег

Сумма денег, которую мы имеем сегодня, представляет большую ценность, чем та же сумма, полученная через год. Как можно оценить сегодняшнюю ценность суммы денег, которая будет получена через некоторое время? Иными словами, как „привести” одну сумму денег к другой? Так как в качестве „сегодня” можно взять любую дату в прошлом, настоящем или будущем, то, как и ранее мы будем говорить о *современной ценности* суммы денег. Обычно это понятие применяется не к одной единственной сумме денег, а к потоку денежных платежей, производимых в различные моменты времени.

Современная ценность суммы денег S , которая будет получена через t лет, равна сегодня той сумме P , которая превратится через t лет в сумму S если на нее будут начисляться сложные проценты по годовой ставке i . То есть современная ценность $P = PV$ суммы S вычисляется по формуле:

$$PV = S(1+i)^{-n}. \quad (1)$$

Обозначение PV происходит от английского термина *Present Value*, который мы и перевели как *современная ценность*.

Если начисление производится по ставке j_m , то современная ценность вычисляется по формуле:

$$PV = S(1 + \frac{j_m}{m})^{-nm}. \quad (2)$$

Пример 3.1. Кредитор дает деньги в долг, получая вексель, по которому через два года будет выплачено 5 000 грн. Какую сумму следует дать под этот вексель сегодня, если за взятые в долг деньги выплачиваются проценты по ставке $j_4 = 6\%$?

Решение. По формуле (2) найдем современную ценность 5 000 грн. Подставив в нее $S = 5000$, $m = 4$, $j_m = 0.06$, $t = 2$, получим:

$$PV = 5000(1 + \frac{0,06}{4})^{-8} = 5000 * 0.8877 = 4438.55 \text{ грн}$$

Таким образом, в условиях задачи современная ценность 5000 грн. равна 4438,55 грн. Эту сумму и следует дать под вексель.

Эквивалентность контрактов

В реальной жизни по тем или иным причинам приходится менять условия контракта. Рассмотрим сначала ситуацию, когда изменяются только сроки платежей. При этом возникает законный вопрос, как должны измениться суммы платежей. Если мы предполагаем, что стоимость денег не будет меняться за время действия контракта (и равна i сложных процентов за один период), то *принцип эквивалентности* состоит в том, что суммы новых платежей должны быть такими, чтобы их современная ценность равнялась современной ценности платежей из контракта. В рассматриваемой ситуации это выражается с помощью двух

простых формул. Если срок платежа увеличивается на t периодов, новая сумма платежа S_1 получается из старой S_0 по формуле:

$$S_1 = S_0(1+i)^t. \quad (3)$$

Если срок платежа сокращается на t периодов, новая сумма платежа S_1 получается из старой S_0 по формуле:

$$S_1 = S_0(1+i)^{-t}. \quad (4)$$

Пример 3.2. Фермер должен вернуть балку 12 000 грн. 1 июля 1998 года. Какую сумму он должен внести в банк: а) 1 января 1997 года; б) 1 января 1999 года? Банк дает ссуды под 8% годовых (сложных).

Решение. а) Так как платеж делается на 1.5 года раньше срока, фермер должен внести в банк меньшую сумму:

$$S = 12000(1+0,008)^{-1.5} = 12000*0.8910 = 10692.00 \text{ грн.}$$

б) В этом случае платеж делается на 0.5 года позже срока, поэтому в банк придется внести сумму, большую сумму, чем 12000 грн.:

$$S = 12000(1+0,008)^{0.5} = 12000*1.0392 = 12470.40 \text{ грн.}$$

Объединение(консолидация) платежей

Рассмотрим теперь ситуацию объединения (консолидации) платежей: требуется свести несколько платежей S_1, \dots, S_k со сроками выплаты t_1, \dots, t_k , соответственно, в один платеж S_0 . При этом могут возникнуть две задачи: определить величину объединенного платежа S_0 , если он должен быть сделан в заданный момент времени t_0 ; определить срок t_0 платежа S_0 .

Пример 3.3. Кооператор должен выплатить поставщику сырья через полгода после поставки 800000 грн., еще через полгода — 1500000 грн. и еще через 8 месяцев — 1300 000 грн. Эти платежи решено объединить в один платеж и выплатить весь долг через год после поставки сырья.

Какую сумму надо выплатить, если на долг начисляется 6% годовых (сложных) ?

Решение. Приводя все платежи к настоящему моменту времени, получаем по формуле

$$S_0(1+0.06)^{-1} = 0.8(1+0.06)^{-0.5} + 1.5(1+0.06)^{-1} + 0.8(1+0.06)^{-1.6}.$$

Из этого уравнения находим $S_0 = 3574119.97 \text{ грн.}$

Продажа контрактов

В практике финансовых операций распространена сделка, которая называется *продажей контракта*. Она заключается в следующем. Некоторый субъект (или организация) имеет на руках контракт, по которому он должен получить с другого субъекта определенные суммы денег в определенные сроки. Владелец контракта желает получить деньги немедленно и для этого продает этот контракт банку (или другому лицу), который будет получать деньги по этому контракту в будущем.

Сколько следует заплатить за этот контракт? Из принципа эквивалентности следует, что за контракт следует заплатить его стоимость в момент покупки, то есть его современную ценность.

Пример 3.4. Фермер Иванов купил у колхоза сарай, заключив контракт, в соответствии с которым обязуется заплатить 1000 грн. через 27 месяцев и еще 3 000 грн. — через 5 лет. Колхоз, нуждаясь в деньгах, хочет продать этот контракт финансовой организации, которая согласна его купить при условии начисления на свои деньги процентов по ставке $i = 8\%$. Сколько должна заплатить компания колхозу за этот контракт?

Решение. Изобразим условия контракта на оси времени, на которой каждый процентный период соответствует кварталу (3 месяца). В 27 месяцах содержится 9 процентных периодов, а в 5 годах — 20 процентных периодов. Стоимость контракта в момент 0 обозначена буквой x :

	1000	3000	
	<hr/>		
0	9	20	t кварталов
x			

Организации следует заплатить за контракт его стоимость в момент 0, следовательно, должно выполняться равенство:

$$x = \frac{1000}{(1+i)^9} + \frac{3000}{(1+i)^{20}}.$$

Подставим в него $i=0.008/4 = 0.02$ и найдем значение x :

$$x = 2\,855.8 \text{ грн.}$$

3.2. Работа в аудитории

- Какова современная ценность 10000 грн., если а) эта сумма будет получена через 3 года 6 месяцев, б) эта сумма была получена 2 года 9 месяцев тому назад, в) эта сумма получена в настоящий момент времени? Стоимость денег - 8% (то есть на деньги, находящиеся в обороте, начисляются 8% годовых (сложных)).
- Вкладчик положил в банк, выплачивающий проценты по ставке $j=5\%$ (сложных), сумму 12000 грн. Через 1 год 6 месяцев он снял со счета 4500 грн., а еще через 2 года положил на свой счет 2000 грн. После этого через 3 года 6 месяцев он закрыл счет. Какую сумму он получил?
- Вкладчик положил в банк некоторую сумму. Через 2 года он положил на свой счет такую же сумму, а еще через 1 год 6 месяцев - снова такую же сумму. Через 2 года 6 месяцев после этого на его счету было 25000 грн. Какую сумму вносил в банк вкладчик каждый раз, если банк начисляет на вложенные деньги проценты по годовой ставке $i=5\%$ (сложных)?
- Вкладчик положил в банк некоторую сумму. Через 2 года он положил на свой счет такую же сумму, а еще через 1 год 6 месяцев - снова такую же сумму. Через 2 года 6 месяцев после этого на его счету было 25000 грн. Какую сумму вносил в банк вкладчик каждый раз, если банк начисляет на вложенные деньги проценты по годовой ставке $i=5\%$ (сложных)?

5. Какую сумму надо положить в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_4=10\%$, чтобы иметь возможность снять со счета 2000 грн. через 1 год 6 месяцев и еще 3000 грн. через 1 год 6 месяцев после этого?
6. Предприниматель взял в банке кредит в 12 тыс. грн. под 15% годовых (сложных). Через 6 месяцев он вернул банку 4500 грн., а еще через 6 месяцев - 2500 грн. Спустя 6 месяцев после этого он взял еще ссуду в 3 тыс. грн., и через 2 года с момента получения этой ссуды полностью погасил долг. Какую сумму составляет последняя уплата?
7. Строительный комбинат продает коттеджи стоимостью 80 тыс. грн., предоставляя покупателям кредит под 12% годовых (сложных). Господин Петров приобрел коттедж. Он выплатил в момент покупки 30 тыс. грн., через год - 20 тыс. грн., еще через год - 20 тыс. грн. и остаток долга погасил через 2.5 года от момента покупки. Чему равен последний платеж?
8. Строительный комбинат продает коттеджи стоимостью 80 тыс. грн., предоставляя покупателям кредит под 12% годовых (сложных). Строительный комбинат учредил банк, аккумулирующий средства на строительство коттеджей и выплачивающий по вложенным в него деньгам также 12% годовых (сложных). Г-н Федоров внес в этот банк некоторую сумму за 2 года до приобретения коттеджа, такую же сумму - в момент приобретения коттеджа, еще 25 тыс. грн. - через год и 30 тыс. грн. - через 2 года с момента приобретения коттеджа, погасив, тем самым, свой долг полностью. Какие суммы вносил г-н Федоров в банк до и в момент приобретения коттеджа?
9. Фермер должен вернуть банку 2000 грн. 1 января 1994 года. Ссуда дана под 15% годовых (сложных). Какую сумму должен уплатить фермер, если он вернет долг а) 1 июля 1993 года, б) 1 июля 1995 года, в) 1 января 1996 года?
10. Торговая фирма обязалась уплатить фермеру за купленное у него зерно 3500 грн. через 2 месяца после покупки, 3000 - еще через 2 месяца и 5200 - еще через 3 месяца. Торговая фирма желает выплатить весь долг одним платежом, равным 12000 грн. В какой срок, считая с момента покупки, она должна это сделать?
11. Г-н А должен уплатить г-ну Б три раза по 25000 грн. через каждые полтора года от настоящего момента. Г-н А предложил заплатить 30000 грн. через 2 года, а остальное - еще через 2 года. Какую сумму он должен уплатить в последний раз, если деньги стоят 9% годовых (сложных)?
12. Г-н Васильев купил у г-на Дмитриева автомобиль, подписав контракт, в соответствии с которым обязался уплатить 15000 грн. через 8 месяцев после момента покупки и 20000 грн. через 18 месяцев после момента покупки. Г-н Дмитриев желает продать этот контракт банку, получающему 6% годовых (сложных). Какую сумму должен заплатить банк за контракт, покупая его через полгода после заключения?

3.3. Домашнее задание

1. Вкладчик положил в банк, выплачивающий проценты по годовой ставке $i = 5\%$ (сложных), сумму 12000 грн. Через 1.5 года он снял со счета 4500 грн., а еще через 2 года положил на свой счет 2000 грн. После этого через 3.5 года он закрыл счет. Какую сумму он получил?
2. Вкладчик положил 3 года назад 5000 грн. в банк, выплачивающий проценты по ставке $j=8\%$ ((сложных)). Год назад он положил еще 2000 грн., а через 3 года 6 месяцев после этого снял со счета 3500 грн. Еще через 6 месяцев он желает

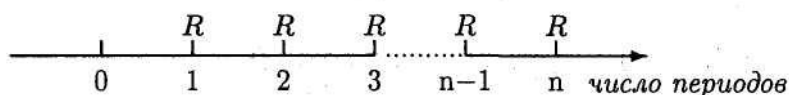
- положить на свой счет такую сумму, чтобы еще через год на счету было 10000 грн. Какую сумму он должен положить на свой счет в последний раз?
3. Вкладчик положил в банк некоторую сумму. Через 2 года он положил на свой счет такую же сумму, а еще через 1 год 6 месяцев - снова такую же сумму. Через 2 года 6 месяцев после этого на его счету было 25000 грн. Какую сумму вносил в банк вкладчик каждый раз, если банк начисляет на вложенные деньги проценты по ставке $j=5\%$ (сложных)?
 4. Фермер взял в банке кредит на сумму 5 млн. грн. под 8% годовых (сложных). Через год он вернул банку 3 млн. грн., а еще через год взял кредит в сумме 2 млн. грн. Через 2 года после этого фермер вернул полученные кредиты полностью. Какую сумму он при этом выплатил банку?
 5. Фермер приобрел трактор, который стоит 25000 грн., в кредит под 12% годовых (сложных). Через 1 год 6 месяцев он уплатил 15000 грн., а еще через 6 месяцев полностью погасил долг. Какую сумму он при этом выплатил?
 6. Строительный комбинат продает коттеджи стоимостью 80 тыс. грн., предоставляя покупателям кредит под 12% годовых (сложных). Господин Иванов приобрел коттедж. Он выплатил 20 тыс. грн. через 3 месяца после покупки, 30 тыс. грн. - еще через 6 месяцев, 10 тыс. грн. - в конце первого года с момента покупки и погасил весь долг через 1.5 года с момента покупки. Какую сумму составил последний платеж?
 7. Строительный комбинат продает коттеджи стоимостью 80 тыс. грн., предоставляя покупателям кредит под 12% годовых (сложных). Господин Сидоров приобрел коттедж, обязавшись выплатить долг в течение трех лет равными платежами по полугодиям (первая уплата - через полгода от момента покупки). Чему равна каждая уплата?
 8. Строительный комбинат продает коттеджи стоимостью 80 тыс. грн., предоставляя покупателям кредит под 12% годовых (сложных). Строительный комбинат учредил банк, аккумулирующий средства на строительство коттеджей и выплачивающий по вложенным в него деньгам также 12% годовых (сложных). Г-н Николаев внес в этот банк 30 тыс. грн. за год до получения коттеджа и еще 30 тыс. грн. - через год после получения коттеджа. Еще через год он внес некоторую сумму, а еще через 2 года погасил долг, внося 10 тыс. грн. Какую сумму он внес через 2 года после получения коттеджа?
 9. Торговая фирма обязалась уплатить фермеру за купленное у него зерно 3500 грн. через 2 месяца после покупки, 3000 - еще через 2 месяца и 5200 - еще через 3 месяца. Стороны договорились объединить эти платежи в один и выплатить его через 5 месяцев после покупки. Чему равен этот платеж, если на деньги начисляются 8% годовых (сложных)?
 10. Торговая фирма обязалась уплатить фермеру за купленное у него зерно 3500 грн. через 2 месяца после покупки, 3000 - еще через 2 месяца и 5200 - еще через 3 месяца. Торговая фирма желает выплатить долг двумя равными платежами через 3 и через 6 месяцев после покупки. Какова должна быть величина каждой из этих уплат?
 11. Г-н Васильев купил у г-на Дмитриева автомобиль, подписав контракт, в соответствии с которым обязался уплатить 15000 грн. Через 8 месяцев после момента покупки и 20000 грн. Через 18 месяцев после момента покупки. Г-н Дмитриев желает продать этот контракт банку, получающему 6% годовых (сложных) на свои деньги. Какую сумму заплатит банк за этот контракт, если купит его в момент его заключения?
 12. Суммы в размере 10, 20 и 15 млн руб. должны быть выплачены через 50, 80 и 150 дней соответственно. Стороны согласились заменить их при

использовании простой ставки одним платежом в размере 50 млн грн.
 Процентная ставка —10%. Определить :
 а) срок консолидированного платежа;
 б) как изменится этот срок, если размер объединяющего платежа задан в сумме 45 млн . грн.?

Тема 4. Финансовые ренты. Функция $S_{n,i}$.

Основные формулы и образцы решения задач

Финансовой рентой называется последовательность платежей, производящихся через равные промежутки времени. Рассмотрим общий случай: делается n платежей, например, вкладов в банк, каждый из которых равен R ; периоды времени между платежами одинаковы, и в конце каждого из них на все сделанные до этого момента платежи начисляются сложные проценты по ставке i . Изобразим эту ренту на оси времени:



Формулу вычисления наращенной к моменту n суммы ренты, которую будем обозначать буквой S , имеет вид:

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \quad (1)$$

Для коэффициента, на который умножается R в получившейся формуле, принято использовать следующее обозначение:

$$S_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \quad (2)$$

Тогда наращенная сумма финансовой ренты выражается формулой:

$$S = R S_{n,i}. \quad (3)$$

Если платежи делаются m раз в году, а начисление процентов также производится m раз в году, то формула (3) приобретает вид

$$S = R s_{ni}^{(m)}, \quad (4)$$

где

$$s_{ni}^{(m)} = \frac{(1+i/m)^{nm} - 1}{i/m}.$$

Пример 5.1. Фирма создает фонд помощи ветеранам труда, вкладывая ежегодно 2 500 грн. в банк, выплачивающий 5% годовых (сложных). Какая сумма будет на счету фонда через 8 лет?

Решение. Вклады в банк образуют финансовую ренту (далее просто ренту), в которой $R = 2\,500$ грн., $n = 8$, $i = 5\%$. Вычисляем наращенную сумму ренты по формуле (3):

$$S = 2500s_{8;5\%} \qquad S = 2500 * s_{8;5\%}.$$

По формуле (2) находим, что $s_{8;5\%} = 9.54911$. Подставляем это значение в формулу выше и получаем ответ:

$$S = 2\,500 * 9.54911 = 23\,872.77 \text{ грн.}$$

Пример 5.2. Предприниматель вкладывает 100 грн. в конце каждого месяца в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_{12} = 9\%$. Какую сумму он накопит за 2 года?

Решение. Вклады в банк, которые делает предприниматель, образуют финансовую ренту, в которой $R = 100$, $n = 24$ (2 года по 12 месяцев), $i = 0.09/12 = 0.0075$. Находим наращенную сумму ренты по формуле (3):

$$S = 100 \frac{(1 + 0.0075)^{24} - 1}{0.0075} = 100 * 26.18847 = 2618.85 \text{ грн..}$$

Вычисление платежей финансовой ренты

Иногда требуется определить величину платежа R по наращенной сумме S . Выразим значение R через S из формулы (3):

$$R = \frac{S}{s_{n;i}}. \quad (4)$$

Рассмотрим пример применения последней формулы.

Пример 5.3. Г-н Петров желает накопить за 8 лет 5000 грн., делая ежегодные равные вклады в банк, который выплачивает проценты по годовой ставке $i = 5\%$ (сложных). Сколько денег он должен вкладывать каждый раз?

Решение. По условию задачи: $S = 5000$, $n = 8$, $i = 0.05$. По формуле (2) находим, что $s_{8;5\%} = 9.54911$. По формуле (4) получаем:

$$R = \frac{5000}{9.54911}.$$

Следовательно, ежегодный вклад в банк г-на Петрова должен быть равен 523.61 грн.

Погашение долгосрочной задолженности единовременным платежом

Должник взял ссуду, равную S грн., которую он должен вернуть через n лет. Ежегодно он должен выплачивать кредитору проценты по ставке q . Одновременно он создает погасительный (амортизационный или страховой) фонд, в который делает ежегодные взносы с целью накопить к моменту возвращения долга необходимую сумму. На деньги, находящиеся в фонде, должник получает $i\%$ в год. Требуется определить так называемую *срочную уплату* α , то есть суммарные ежегодные затраты должника.

Срочная уплата состоит из выплачиваемых на долг процентов, которые равны Sq , и взноса в страховой фонд R . Взносы R являются членами годовой ренты, состоящей из n членов, наращенная сумма которой в момент n должна быть равна S . Согласно формуле (4) срочная уплата равна:

$$\alpha = Sq + \frac{S}{S_{n;i}} \quad (5)$$

Пример 5.4. Кредит в 1 млн. грн. получен фирмой в банке под 8% годовых на 4 года. Одновременно с получением ссуды для ее погашения создан страховой фонд, в который делаются равные ежегодные взносы. На деньги, внесенные в фонд, выплачиваются 5% годовых. Найдём ежегодную срочную уплату по долгу.

Решение. По формуле (2) находим, что

$$S_{4;5\%} = 4.310125.$$

По формуле (5) при $S = 1000000$, $q = 0.08$, $n = 4$, $i = 0.05$ находим величину срочной уплаты:

$$\alpha = 1000000 * 0.08 + \frac{1000000}{4.310125} = 312011.83$$

Инвестиции в предприятия, использующие невосполняемые ресурсы

Рассмотрим инвестиции в предприятия, использующие невосполняемые ресурсы — таковыми, например, являются предприятия добывающей промышленности. Капиталовложения делаются с таким расчетом, чтобы получать в течение срока действия предприятия определенный ежегодный доход и накопить к моменту истощения ресурсов, используемых предприятием (запасов ископаемых, например), страховой фонд, равный сумме инвестиций. Рассмотрим пример.

Пример 5.5. Г-н Макаров хочет купить золотой рудник, который по прогнозам будет давать в течение следующих 10 лет по 200 000 грн. дохода в год, после чего окажется полностью исчерпанным. Г-н Макаров хочет получать 18% ежегодного дохода на вложенную сумму. Одновременно он собирается установить страховой фонд, чтобы накопить к концу срока действия рудника вложенную сумму. Сколько он должен заплатить за рудник, если по вложениям в страховой фонд он может получать 10% в год?

Решение. Обозначим искомую цену покупки буквой S . Ежегодные вклады R в страховой фонд образуют ренту, наращенная сумма которой равна S . По формуле (4) имеем:

$$R = \frac{S}{S_{10;10\%}}.$$

Годовой доход от рудника, равный 200000 грн., состоит из вклада в страховой фонд и дохода, составляющего 18% от вложенной суммы, то есть равного $0.18 \cdot S$ грн. Следовательно, сумма S должна удовлетворять уравнению:

$$200000 = 0.18 \cdot S + \frac{S}{S_{10;10\%}}.$$

По формуле (2) находим $S_{10;10\%} = 15.9374$. Подставляя это значение в уравнение, находим $S = 823\,908.50$ грн.

4.2. Работа в аудитории

1. Торговая фирма вкладывает 25000 грн. в конце каждого года в банк, выплачивающий проценты по ставке 5% годовых (сложных). Какая сумма будет на счету фирмы а) через 3 года, б) через 10 лет?
2. Фермер хочет накопить за 6 лет 40000 грн. для покупки трактора, делая ежегодные равные вклады в банк, который выплачивает проценты по ставке $i=10\%$ годовых (сложных). Какую сумму должен вкладывать ежегодно фермер?
3. Акционерное общество по производству радиотехники образовало фонд для покупки техники, вкладывая в него ежегодно 300000 грн. При этом каждое полугодие оно делает равные вклады в банк, который выплачивает $i_2=5\%$ годовых (сложных). Какая сумма будет на счету АО через 4 года?
4. Судостроительная фирма кладет в конце каждого года 120000 грн. в банк, который выплачивает сложные проценты по ставке j . Какую сумму накопит фирма за 10 лет?
5. Судостроительная фирма желает вносить в банк ежеквартально равные суммы (по 30000 грн.). Банк выплачивает сложные проценты по ставке $j_4=8\%$. Какую сумму накопит фирма за 10 лет?
6. Банк выплачивает на вложенные в него деньги проценты по ставке $j_4 = 3\%$. Клиент вкладывает в этот банк ежегодно 800 грн., делая равные вклады в конце каждого квартала. Какая сумма будет на счету этого клиента через 5 лет?
7. Банк выплачивает на вложенные в него деньги проценты по ставке $j_4=3\%$. Клиент делает равные вклады в этот банк в конце каждого квартала. Какую сумму должен вкладывать ежеквартально клиент, чтобы за 6 лет накопить 6000 грн.?
8. Фермер взял в банке 5 тыс. рублей под 15% годовых на 5 лет. Для погашения долга он образовал страховой фонд, внося в него равные ежегодные взносы и получая на эти деньги 8% годовых. Найдите ежегодную срочную уплату по долгу.

4.3. Домашнее задание

1. Торговая фирма вкладывает 25000 грн. в конце каждого квартала в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_4=5\%$. Какая сумма будет на счету фирмы а) через 3 года, б) через 10 лет?
2. Фермер хочет накопить за 6 лет 40000 грн. для покупки трактора, делая ежемесячные равные вклады в банк, который выплачивает проценты по ставке $j_{12}=5\%$. Какую сумму должен вкладывать ежемесячно фермер?
3. Акционерное общество по производству радиотехники образовало фонд для покупки техники. При этом каждое полугодие оно делает равные вклады в банк, который выплачивает $i_2=5\%$

(сложных). Какую сумму должно вкладывать АО каждое полугодие, если ему необходимо накопить за 4 года 2 млн. грн.?

4. Судостроительная фирма кладет в конце каждого года в банк некоторую сумму. Банк выплачивает сложные проценты по ставке $j=8\%$. Какую сумму должна класть в банк в конце каждого года фирма, чтобы за 10 лет накопить 2 млн. грн.?

5. Судостроительная фирма желает вносить в банк ежеквартально равные суммы. Банк выплачивает сложные проценты по ставке $j_4=8\%$. Какую сумму должна вносить ежеквартально фирма, чтобы за 15 лет накопить 3 млн. грн.?

6. Фермер взял в банке 5 тыс. рублей под 15% годовых на 5 лет. Для погашения долга он образовал страховой фонд, внося в него равные ежегодные взносы и получая на эти деньги 10% годовых. Найдите ежегодную срочную уплату по долгу.

7. Нефтедобывающая компания покупает нефтеносный участок, который будет приносить в течение 20 лет доход 5 млн. грн. ежегодно, после чего запасы нефти истощатся. Компания желает получать 12% ежегодного дохода на вложенную сумму. Одновременно она образует страховой фонд, чтобы к моменту истощения запасов нефти на участке накопить сумму, которую она заплатила за этот участок. На деньги, вложенные в фонд, она получает 8% в год. Какую сумму компания должна заплатить за участок?

8. Нефтедобывающая компания покупает нефтеносный участок, который будет приносить в течение 20 лет доход 5 млн. грн. ежегодно, после чего запасы нефти истощатся. Компания заплатила за участок 50 млн. грн. Одновременно она образует страховой фонд, чтобы к моменту истощения запасов нефти на участке накопить сумму, которую она заплатила за этот участок. На деньги, вложенные в фонд, она получает 8% в год. Какую сумму она должна ежегодно вносить в страховой фонд и каким будет ее ежегодный чистый доход? Сколько процентов от вложенной суммы составит чистый годовой доход?

Тема 5. Современная стоимость ренты

5.1 Основные формулы и образцы решения задач

Современная ценность денежного потока

Задача о современной ценности денежного потока может быть поставлена относительно финансовой ренты. Например, желая создать фонд для ежемесячной выплаты стипендий, основатель фонда должен знать, какую сумму необходимо вложить в этот фонд. Эта сумма равна современной ценности финансовой ренты, которую составляют выплаты стипендий.

Современная ценность ренты равна современной ценности ее наращенной суммы, следовательно,

$$\begin{aligned} PV &= S(1+i)^{-n} = R s_{n,i} (1+i)^{-n} = \\ &= R \frac{(1+i)^n - 1}{i} (1+i)^{-n} = R \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}. \end{aligned} \quad (1)$$

Таким образом, современная стоимость ренты находится по формуле

$$PV = R a_{n,i}, \quad (2)$$

где

$$a_{n,i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}. \quad (3)$$

3. Если платежи делаются m раз в году, а начисление процентов также производится m раз в году, то формула (2) приобретает вид

$$PV = Ra_{n;i}^{(m)} \quad (4)$$

где

$$a_{n,i}^{(m)} = \frac{1 - \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{-nm}}{\frac{i}{m}}. \quad (5)$$

Пример 5.1. Фирма посылает служащих на учебу и желает положить в банк, который выплачивает 10% годовых (сложных), такую сумму, чтобы иметь возможность снимать с этого счета ежегодно по 10 000 грн. для выплаты стипендии. Вклад должен быть исчерпан к концу пятилетнего срока учебы (деньги снимаются в конце каждого года). Какую сумму фирма должна положить в банк?

Решение. Искомая сумма равна ценности в момент 0 ренты, состоящей из пяти платежей по 10000 грн. каждый, при $i = 10\% = 0.1$. Согласно формулы (4) для $a_{n,i}^{(m)} = a_{5;10\%}^{(1)} = 3,79079$ имеем:

$$PV = 10000 * 3,79079 = 37907.90.$$

Вечная рента

Вечной рентой называется финансовая рента с бесконечным числом членов. Современная ценность конечной ренты этого вида определяется формулой (1). Найдем предел данного в этой формуле выражения при неограниченном увеличении n :

$$PV_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} Ra_{n,i} = R \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i}.$$

Итак, современная ценность вечной ренты в данном случае равна:

$$PV_{\infty} = \frac{R}{i}.$$

План долгосрочной задолженности несколькими равными платежами

Рассмотрим задачу погашения долгосрочной задолженности. Рассмотрим случай, когда задолженность погашается несколькими равными платежами, которые делаются через равные промежутки времени. Такая форма погашения задолженности распространена в потребительском кредите и во внешнеторговых расчетах. Опишем соответствующую задачу.

Заемщик взял ссуду, равную S грн., и обязался вернуть долг, сделав n равных срочных уплат через равные промежутки времени. Требуется определить величину срочной уплаты α при условии, что на долг начисляются сложные проценты по ставке q за каждый промежуток времени.

Последовательность срочных уплат является рентой, имеющей n членов, современная ценность которой равна S . Следовательно, по формуле

$$R = \frac{S}{s_{n;q}}$$

величину годового взноса.

Сумма выплачиваемых в t -ом периоде процентов равна $S_t q$, где S_t — остаток долга на начало t -го периода и $S_1 = S$. Сумма погашения долга в t -ом периоде равна величине и сумма выплаченных процентов по долгу связаны соотношением

$$R = R_t + S_t q$$

где $t = 2, \dots, n$.

Пример 5.2. Долг в 300 тыс. грн. надо погасить равными срочными платежами за 5 лет, делая платежи в конце каждого года. За долг выплачиваются проценты по годовой ставке $q = 5\%$. Составить план погашения долга.

Решение. По условию задачи $n = 5$, $S = S_1 = 300000$, $q = 0.05$. Находим постоянную годовую уплату

$$R = \frac{S}{s_{5;5\%}} = \frac{300000}{4.32948} \approx 69292.39 \text{ грн.}$$

Записываем план погашения долга в виде таблицы:

Номер года (t)	Остаток долга на начало t -го года (руб.) $S_t = S_{t-1} - d_{t-1}$	Срочная уплата (α)	Сумма выплаченных в t -ом году процентов (руб.) $S_t \times 0.05$	Сумма погашения долга в t -ом году $d_t = \alpha - S_t \times 0.05$
1	300 000	69 292	15 000	54 292
2	245 708	69 292	12 285	57 007
3	188 701	69 292	9 435	59 857
4	128 844	69 292	6 442	62 850
5	65 994	69 292	3 300	65 994

Итого: 300 000 руб.

5.2. Работа в аудитории

1. Какую сумму надо вложить в банк, выплачивающий 5% годовых, чтобы иметь возможность снимать в конце каждого года 500 грн., исчерпав весь вклад к концу десятого года?
2. Какую сумму надо вложить в банк, выплачивающий проценты по ставке 5% (сложных годовых), чтобы иметь возможность снимать в конце каждого года 500 грн., исчерпав весь вклад к концу десятого года?
3. Какую сумму следует положить в банк, чтобы в течение следующих 10 лет получать по 500 грн., снимая эту сумму равными частями каждые 6 месяцев, если банк начисляет проценты по ставке $j_2=5\%$?
4. Какую сумму надо положить в банк, чтобы в течение следующих 26 лет снимать со счета каждый год по 1000 грн., исчерпав весь счет к концу этого срока, если банк начисляет на деньги, находящиеся на счете, 10% годовых?
5. Перед выходом на пенсию господин Федоров хочет обеспечить себе ежегодный доход в сумме 5000 грн. Неограниченно долго. Какую сумму он должен положить для этого в банк, выплачивающий 5% годовых?
6. Перед выходом на пенсию господин Федоров хочет обеспечить себе ежегодный доход в сумме 5000 грн. неограниченно долго, снимая деньги ежеквартально. Какую сумму он должен положить для этого в банк, выплачивающий 5% годовых?
7. Перед выходом на пенсию господин Федоров хочет обеспечить себе ежегодный доход в сумме 5000 грн. неограниченно долго. Какую сумму он должен положить для этого в банк, выплачивающий проценты по ставке $j=8\%$?
8. Перед выходом на пенсию господин Федоров хочет обеспечить себе ежегодный доход в сумме 5000 грн. неограниченно долго. При этом он желает снимать со счета ежеквартально четверть годового дохода. Какую сумму он должен положить для этого в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_4=5\%$?
9. Перед выходом на пенсию господин Федоров хочет обеспечить себе годовой доход в сумме 5000 грн. неограниченно долго, снимая со счета ежеквартально четверть годового дохода. Какую сумму он должен положить для этого в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_4=5\%$?
10. Фермер приобрел трактор в кредит за 12000 грн. За кредит он должен платить 5% годовых и выплатить весь долг за 4 года. Найти размер ежегодной срочной уплаты и составить план погашения долга.
11. Фермер приобрел трактор в кредит за 12000 грн. За кредит он должен платить 5% годовых и выплатить весь долг за 4 года. Составьте план погашения долга, если фермер сделает 4 срочные уплаты: по одной каждые год.
12. Господин Иванов купил в кредит автомобиль, который стоит 80000 грн. Он договорился с магазином, что он будет делать ежемесячные срочные уплаты величиной по 7500 грн. Составьте план погашения долга, если на долг магазин начисляет 10% годовых.
13. Владелец дома планирует произвести через 15 лет капитальный ремонт, на который ему потребуется 12 млн. грн. Он может ежегодно вкладывать для этой цели в банк 600 тыс. грн. Под какие проценты он должен вложить эти деньги, чтобы накопить необходимую сумму?
14. Господин Петров собирается положить в банк на счет своего сына 180000 грн., чтобы тот в течение 5 лет учебы в университете мог снимать в конце каждого года со счета 40 тыс. грн., исчерпав весь вклад к концу учебы. Какой процент для этого должен платить банк?

5.3. Домашнее задание

1. Какую сумму надо вложить в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_2=5\%$, чтобы иметь возможность снимать в конце каждого месяца 500 грн., исчерпав весь вклад к концу десятого года?
2. Какую сумму следует положить в банк, чтобы в течение следующих 10 лет получать по 500 грн., снимая эту сумму равными частями каждые 6 месяцев, если банк начисляет на вложенные в него деньги $i_2=5\%$?
3. Какую сумму следует положить в банк, чтобы в течение следующих 10 лет получать по 500 грн., снимая эту сумму равными частями каждые 6 месяцев, если банк начисляет проценты по ставке $j_2=8\%$?
4. Какую сумму надо положить в банк, чтобы в течение следующих 28 лет снимать со счета каждый год по 1000 грн., исчерпав весь счет к концу этого срока, если банк начисляет проценты по ставке $j=12\%$?
5. Какую сумму надо положить в банк, чтобы в течение следующих 26 лет снимать со счета каждый год по 1000 грн., исчерпав весь счет к концу этого срока, если банк начисляет непрерывные проценты с силой роста 15%?
6. Перед выходом на пенсию господин Федоров хочет обеспечить себе ежегодный доход в сумме 5000 грн. неограниченно долго, снимая деньги раз в год. Какую сумму он должен положить для этого в банк, выплачивающий 5% годовых?
7. Перед выходом на пенсию господин Федоров хочет обеспечить себе ежегодный доход в сумме 5000 грн. неограниченно долго, снимая ежеквартально четверть годового дохода. Какую сумму он должен положить для этого в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_4=5\%$?
8. Перед выходом на пенсию господин Федоров хочет обеспечить себе ежегодный доход в сумме 5000 грн. неограниченно долго, снимая деньги раз в 3 раза в год (по 15000 грн.). Какую сумму он должен положить для этого в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_3=5\%$?
9. Перед выходом на пенсию господин Федоров хочет обеспечить себе ежеквартальный доход в сумме 5000 грн. неограниченно долго. Какую сумму он должен положить для этого в банк, начисляющий на деньги выплачивающий проценты по ставке $j_4=5\%$?
10. Перед выходом на пенсию господин Федоров хочет обеспечить себе доход неограниченно долго. При этом он желает снимать деньги 3 раза в год (по 15000 грн.). Какую сумму он должен положить для этого в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_3=6\%$?
11. Фермер приобрел трактор в кредит за 12000 грн. За кредит он должен платить 5% годовых. Составьте план погашения долга, если срочная годовая уплата установлена в размере 3500 грн.
12. Господин Иванов купил в кредит автомобиль, который стоит 80000 грн. Он обязался вернуть долг в течение года, делая равные ежемесячные срочные уплаты. Найти величину срочной уплаты и составить план погашения долга, если на долг магазин начисляет 10% годовых.
13. Владелец дома планирует произвести через 15 лет капитальный ремонт, на который ему потребуется 12 млн. грн. Он может ежегодно вкладывать для этой цели в банк 600 тыс. грн. Под какие проценты он должен вложить эти деньги, чтобы накопить необходимую сумму?

Контрольная работа (часть 1)

Задание 1.

12. Какую сумму надо положить в банк, выплачивающий 4% простых в год, чтобы получить 5000 грн. а) через 4 месяца, б) через 1 год, в) через 2 года 9 месяцев?
13. Вкладчик положил в банк, выплачивающий 18% простых в год, вклад 6000 грн. Какая сумма будет на счету вкладчика, если деньги внесены 15 октября 2007 года, 22 декабря 2008 года внесена сумма 2000 грн., а счет закрыт 1 мая 2009 года. Провести расчеты для немецкой, английской и французской практик.
14. Фермер собирает деньги на постройку нового коровника и положил в банк 100000 грн. Через 2 года 6 месяцев на счету было 120000 грн. Сколько процентов (простых) выплачивает банк в год?
15. Г-н Иванов покупает в магазине телевизор, цена которого 450 грн. На всю эту сумму он получает кредит, который должен погасить за два года равными ежеквартальными платежами. Чему равна каждая уплата, если магазин предоставляет кредит под 6% годовых (простых)?
16. Какую прибыль получит банк в результате учета 20 мая трех векселей по 20000 грн. каждый, если срок оплаты первого векселя 10 сентября, а двух других - 1 октября того же года и учетная ставка этого банка равна 10%?
17. Клиент учел 1 февраля 1992 года вексель на сумму 40000 грн., срок которого 1 июня того же года, и получил за него 38790 грн. Какова учетная ставка банка?
18. Г-н Гаврилов должен выплатить господину Серову 20000 грн. в следующие сроки: 5000 грн. через 2 года, 5000 грн. через 3 года и еще 10000 грн. через 5 лет, считая от настоящего момента. Г-н Гаврилов предложил изменить контракт, обязавшись уплатить 10000 грн. через 3 года. Какую сумму должен выплатить г-н Гаврилов по новому контракту через 4 года, чтобы новый контракт был эквивалентен первоначальному?
19. Г-н Иванов приобрел в кредит набор мебели, обязавшись выплачивать за него по 200 грн. каждый квартал в течение трех лет. Через год, сделав четыре платежа, г-н Иванов пожелал сразу погасить оставшийся долг. Какую сумму он должен заплатить, если на деньги начисляются 8% годовых (простых)?
20. Г-н Иванов приобрел в кредит набор мебели, обязавшись выплачивать за него по 200 грн. каждый квартал в течение трех лет. Г-н Иванов пожелал сразу изменить первоначальный контракт и выплачивать свой долг равными ежегодными платежами. Какова должна быть каждая из этих уплат, чтобы новый контракт был эквивалентен первоначальному?
21. Торговая фирма планирует приобрести новые помещения, за которые она должна заплатить 120000 грн. Фирма имеет два предложения. По первому предложению фирма должна выплатить эту сумму за 3 года, выплачивая в конце каждого года по 40000 грн. По второму предложению фирма должна заплатить сразу 30000 грн., а остальные 90000 грн. погашать равными суммами каждые полгода, выплатив весь долг к концу третьего года. Какое предложение выгоднее для фирмы? На деньги начисляются 8% годовых (простых)
22. В рассматриваемый год ожидаемая инфляция составляет 20%. Какова реальная доходность по вкладу в банк, если годовой процент по нему равен 25%?
12. Господин Иванов занял у господина Петрова 9200 грн и выдал ему вексель, по которому обязался выплатить через три месяца 10 тыс. грн. Найти годовой процент r и соответственно годовую учетную ставку d оказанной Петровым «финансовой» любезности. Задачу решите если r и d — ставки простых процентов.

Задание 2

11. Предприниматель положил в банк, начисляющий проценты по ставке $j_3=6\%$, 8000 грн. Какая сумма будет на счету этого клиента а) через 1 год, б) через 8 месяцев, в) через 4 года, г) через 6 лет 6 месяцев?
12. Фермер хочет вложить 30000 грн., чтобы через 5 лет получить 40000 грн. Под какую процентную ставку j_{12} он должен вложить свои деньги?
13. Клиент вложил в банк 1000 грн. Какая сумма будет на счету этого клиента через 1 год, если банк начисляет проценты по ставке а) $j_1=5\%$, б) $j_6=5\%$, в) $j_{12}=5\%$, г) $j_{360}=5\%$?
14. Какую сумму надо положить в банк, выплачивающий непрерывные проценты по ставке 7% , чтобы через 10 лет на счету было 5000 грн.?
15. Г-н Петров имеет вексель на 15000 грн., который он хочет учесть 1 марта текущего года в банке по сложной учетной ставке, равной 7% . Какую сумму он получит, если срок векселя а) 1 июля того же года, б) 1 июля следующего года?
16. Банк выплачивает на вложенные в него деньги 8% годовых (сложных). Какую ставку j_m должен установить банк, чтобы доходы клиентов не изменились, если а) $m=2$, б) $m=6$, в) $m=12$?
17. Банк учитывает вексель за 60 дней до срока его оплаты по простой учетной ставке $d_n=6\%$. Какую сложную учетную ставку должен установить банк, чтобы доход банка не изменился?
18. Банк учитывает векселя по сложной учетной ставке $d_c=6\%$. По какой учетной ставке f_m этот банк должен учитывать векселя, чтобы доход банка не изменился, если а) $m=2$, б) $m=4$, в) $m=12$?
19. Банк учитывает векселя по сложной учетной ставке 8% . Какова реальная доходность этой операции?
20. Банк начисляет на вложенные в него деньги проценты по ставке $j_4=18\%$ и собирается перейти к непрерывному начислению процентов. Какую силу роста должен установить банк, чтобы доходы клиентов не изменились?
21. Банк выплачивает по вкладам 6% годовых (сложных). Какова реальная доходность вкладов в этот банк, если начисление процентов делается а) по полугодиям, б) поквартально, в) ежемесячно?
22. Банк учитывает векселя по сложной учетной ставке $f_4=8\%$. Какова реальная доходность этой операции?

Замечание. Запись $f_{12}=5\%$ означает годовую процентную ставку в 5% начисляемую 12 раз в году, т.е. помесечно.

Задание 3

12. Вкладчик положил в банк, выплачивающий проценты по годовой ставке $i=5\%$ (сложных), сумму 12000 грн. Через 1.5 года он снял со счета 4500 грн., а еще через 2 года положил на свой счет 2000 грн. После этого через 3.5 года он закрыл счет. Какую сумму он получил?

13. Вкладчик положил 3 года назад 5000 грн. в банк, выплачивающий проценты по ставке $j=8\%$ ((сложных)). Год назад он положил еще 2000 грн., а через 3 года 6 месяцев после этого снял со счета 3500 грн. Еще через 6 месяцев он желает положить на свой счет такую сумму, чтобы еще через год на счету было 10000 грн. Какую сумму он должен положить на свой счет в последний раз?
14. Вкладчик положил в банк некоторую сумму. Через 2 года он положил на свой счет такую же сумму, а еще через 1 год 6 месяцев - снова такую же сумму. Через 2 года 6 месяцев после этого на его счету было 25000 грн. Какую сумму вносил в банк вкладчик каждый раз, если банк начисляет на вложенные деньги проценты по ставке $j=5\%$ (сложных)?
15. Фермер взял в банке кредит на сумму 5 млн. грн. под 8% годовых (сложных). Через год он вернул банку 3 млн. грн., а еще через год взял кредит в сумме 2 млн. грн. Через 2 года после этого фермер вернул полученные кредиты полностью. Какую сумму он при этом выплатил банку?
16. Фермер приобрел трактор, который стоит 25000 грн., в кредит под 12% годовых (сложных). Через 1 год 6 месяцев он уплатил 15000 грн., а еще через 6 месяцев полностью погасил долг. Какую сумму он при этом выплатил?
17. Строительный комбинат продает коттеджи стоимостью 80 тыс. грн., предоставляя покупателям кредит под 12% годовых (сложных). Господин Иванов приобрел коттедж. Он выплатил 20 тыс. грн. через 3 месяца после покупки, 30 тыс. грн. - еще через 6 месяцев, 10 тыс. грн. - в конце первого года с момента покупки и погасил весь долг через 1.5 года с момента покупки. Какую сумму составил последний платеж?
18. Строительный комбинат продает коттеджи стоимостью 80 тыс. грн., предоставляя покупателям кредит под 12% годовых (сложных). Господин Сидоров приобрел коттедж, обязавшись выплатить долг в течение трех лет равными платежами по полугодиям (первая уплата - через полгода от момента покупки). Чему равна каждая уплата?
19. Строительный комбинат продает коттеджи стоимостью 80 тыс. грн., предоставляя покупателям кредит под 12% годовых (сложных). Строительный комбинат учредил банк, аккумулирующий средства на строительство коттеджей и выплачивающий по вложенным в него деньгам также 12% годовых (сложных). Г-н Николаев внес в этот банк 30 тыс. грн. за год до получения коттеджа и еще 30 тыс. грн. - через год после получения коттеджа. Еще через год он внес некоторую сумму, а еще через 2 года погасил долг, внося 10 тыс. грн. Какую сумму он внес через 2 года после получения коттеджа?
20. Торговая фирма обязалась уплатить фермеру за купленное у него зерно 3500 грн. через 2 месяца после покупки, 3000 - еще через 2 месяца и 5200 - еще через 3 месяца. Стороны договорились объединить эти платежи в один и выплатить его через 5 месяцев после покупки. Чему равен этот платеж, если на деньги начисляются 8% годовых (сложных)?
21. Торговая фирма обязалась уплатить фермеру за купленное у него зерно 3500 грн. через 2 месяца после покупки, 3000 - еще через 2 месяца и 5200 - еще через 3 месяца. Торговая фирма желает выплатить долг двумя равными платежами через 3 и через 6 месяцев после покупки. Какова должна быть величина каждой из этих уплат?
22. Г-н Васильев купил у г-на Дмитриева автомобиль, подписав контракт, в соответствии с которым обязался уплатить 15000 грн. Через 8 месяцев после момента покупки и 20000 грн. Через 18 месяцев после момента покупки. Г-н Дмитриев желает продать этот контракт банку, получающему 6% годовых (сложных) на свои деньги. Какую сумму заплатит банк за этот контракт, если купит его в момент его заключения?

12. Суммы в размере 10, 20 и 15 млн руб. должны быть выплачены через 50, 80 и 150 дней соответственно. Стороны согласились заменить их при использовании простой ставки одним платежом в размере 50 млн грн. Процентная ставка —10%. Определить :
- а) срок консолидированного платежа;
 - б) как изменится этот срок, если размер объединяющего платежа задан в сумме 45 млн . грн.?

Задание 4

1. Торговая фирма вкладывает 25000 грн. в конце каждого квартала в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_4=5\%$. Какая сумма будет на счету фирмы а) через 3 года, б) через 10 лет?
2. Фермер хочет накопить за 6 лет 40000 грн. для покупки трактора, делая ежемесячные равные вклады в банк, который выплачивает проценты по ставке $j_{12}=5\%$. Какую сумму должен вкладывать ежемесячно фермер?
3. Акционерное общество по производству радиотехники образовало фонд для покупки техники. При этом каждое полугодие оно делает равные вклады в банк, который выплачивает $i_2=5\%$ (сложных). Какую сумму должно вкладывать АО каждое полугодие, если ему необходимо накопить за 4 года 2 млн. грн.?
4. Судостроительная фирма кладет в конце каждого года в банк некоторую сумму. Банк выплачивает сложные проценты по ставке $j=8\%$. Какую сумму должна класть в банк в конце каждого года фирма, чтобы за 10 лет накопить 2 млн. грн.?
5. Судостроительная фирма желает вносить в банк ежеквартально равные суммы. Банк выплачивает сложные проценты по ставке $j_4=8\%$. Какую сумму должна вносить ежеквартально фирма, чтобы за 15 лет накопить 3 млн. грн.?
6. Фермер взял в банке 5 тыс. рублей под 15% годовых на 5 лет. Для погашения долга он образовал страховой фонд, внося в него равные ежегодные взносы и получая на эти деньги 10% годовых. Найдите ежегодную срочную уплату по долгу.
7. Нефтедобывающая компания покупает нефтеносный участок, который будет приносить в течение 20 лет доход 5 млн. грн. ежегодно, после чего запасы нефти истощатся. Компания желает получать 12% ежегодного дохода на вложенную сумму. Одновременно она образует страховой фонд, чтобы к моменту истощения запасов нефти на участке накопить сумму, которую она заплатила за этот участок. На деньги, вложенные в фонд, она получает 8% в год. Какую сумму компания должна заплатить за участок?
8. Нефтедобывающая компания покупает нефтеносный участок, который будет приносить в течение 20 лет доход 5 млн. грн. ежегодно, после чего запасы нефти истощатся. Компания заплатила за участок 50 млн. грн. Одновременно она образует страховой фонд, чтобы к моменту истощения запасов нефти на участке накопить сумму, которую она заплатила за этот участок. На деньги, вложенные в фонд, она получает 8% в год. Какую сумму она должна ежегодно вносить в страховой фонд и каким будет ее ежегодный чистый доход? Сколько процентов от вложенной суммы составит чистый годовой доход?

Задание 5

14. Какую сумму надо вложить в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_{12}=5\%$, чтобы иметь возможность снимать в конце каждого месяца 500 грн., исчерпав весь вклад к концу десятого года?
15. Какую сумму следует положить в банк, чтобы в течение следующих 10 лет получать по 500 грн., снимая эту сумму равными частями каждые 6 месяцев, если банк начисляет на вложенные в него деньги $i_2=5\%$?

16. Какую сумму следует положить в банк, чтобы в течение следующих 10 лет получать по 500 грн., снимая эту сумму равными частями каждые 6 месяцев, если банк начисляет проценты по ставке $j_2=8\%$?
17. Какую сумму надо положить в банк, чтобы в течение следующих 28 лет снимать со счета каждый год по 1000 грн., исчерпав весь счет к концу этого срока, если банк начисляет проценты по ставке $j=12\%$?
18. Какую сумму надо положить в банк, чтобы в течение следующих 26 лет снимать со счета каждый год по 1000 грн., исчерпав весь счет к концу этого срока, если банк начисляет непрерывные проценты с силой роста 15%?
19. Перед выходом на пенсию господин Федоров хочет обеспечить себе ежегодный доход в сумме 5000 грн. неограниченно долго, снимая деньги раз в год. Какую сумму он должен положить для этого в банк, выплачивающий 5% годовых?
20. Перед выходом на пенсию господин Федоров хочет обеспечить себе ежегодный доход в сумме 5000 грн. неограниченно долго, снимая ежеквартально четверть годового дохода. Какую сумму он должен положить для этого в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_4=5\%$?
21. Перед выходом на пенсию господин Федоров хочет обеспечить себе ежегодный доход в сумме 5000 грн. неограниченно долго, снимая деньги раз в 3 раза в год (по 15000 грн.). Какую сумму он должен положить для этого в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_3=5\%$?
22. Перед выходом на пенсию господин Федоров хочет обеспечить себе ежеквартальный доход в сумме 5000 грн. неограниченно долго. Какую сумму он должен положить для этого в банк, начисляющий на деньги выплачивающий проценты по ставке $j_4=5\%$?
23. Перед выходом на пенсию господин Федоров хочет обеспечить себе доход неограниченно долго. При этом он желает снимать деньги 3 раза в год (по 15000 грн.). Какую сумму он должен положить для этого в банк, выплачивающий проценты по ставке $j_3=6\%$?
24. Фермер приобрел трактор в кредит за 12000 грн. За кредит он должен платить 5% годовых. Составьте план погашения долга, если срочная годовая уплата установлена в размере 3500 грн.
25. Господин Иванов купил в кредит автомобиль, который стоит 80000 грн. Он обязался вернуть долг в течение года, делая равные ежемесячные срочные уплаты. Найти величину срочной уплаты и составить план погашения долга, если на долг магазин начисляет 10% годовых.